Воскресенье, 13 апреля 2014

Задача 4. Найдите все целые числа $n \geq 2$, для которых существует набор $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ целых чисел, такой, что если $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ и n делит $2i + j$, то $x_i < x_j$.

Задача 5. Пусть n – натуральное число. Имеется n коробок, в каждой из которых лежит неотрицательное количество камешков. За ход можно достать два камешка из любой коробки, один из них выбросить, а второй переложить в любую другую коробку. Начальное расположение камешков назовем *разрешаемым*, если из него за конечное количество шагов (может быть и нулевое) можно добиться того, что все коробки станут непустыми. Найдите все неразрешаемые начальные расположения камешков, такие, что в какую коробку ни добавь один камешек, расположение станет разрешаемым.

Задача 6. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенству

$$f\big(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\big) = (y + f(x))(x + f(y))$$

при всех действительных значениях x и y.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача стоит 7 баллов