Duminică, 13 aprilie 2014

Problema 4. Determinaţi numerele întregi $n \geq 2$ pentru care există numere întregi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ care satisfac condiţia că dacă $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ şi n divide pe $2i + j$, atunci $x_i < x_j$.

Problema 5. Fie n un număr natural nenul. Avem n cutii, fiecare dintre ele putând conţine un număr de pietricele. O *mutare* constă în a scoate două pietricele dintr-o cutie, la alegerea noastră, din care aruncăm una dintre pietricele şi punem cealaltă dintre pietricele într-una din cutii, la alegerea noastră. O configuraţie iniţială de pietricele este zisă *rezolvabilă* dacă este posibil să ajungem la o configuraţie care nu conţine nicio cutie goală, într-un număr finit (poate zero) de mutări. Determinaţi configuraţiile iniţiale de pietricele care nu sunt rezolvabile, dar care devin rezolvabile prin adăugarea unei pietricele adiţionale într-una din cutii, oricare ar fi aceasta.

Problema 6. Determinaţi funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

pentru orice numere reale x şi y.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte