Niedziela, 13 kwietnia 2014 r.

Problem 4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których istnieją liczby naturalne $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ takie, że jeśli $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ oraz liczba $2i + j$ jest podzielna przez n, to $x_i < x_j$.

Problem 5. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Mamy n pudełek, każde z nich zawiera pewną nieujemną liczbą kamyków. W każdym ruchu możemy wziąć dwa kamyki z dowolnego pudełka, wyrzucić jeden z nich, a drugi włożyć do dowolnego innego pudełka. Początkową konfigurację kamyków nazwiemy *rozwiązywalną* jeżeli można z niej osiągnąć w skończonej (być może zerowej) liczbie ruchów pewną konfigurację, w której nie ma pustego pudełka. Wyznacz wszystkie początkowe konfiguracje kamyków, które nie są rozwiązywalne, ale staną się rozwiązywalne po dodaniu dodatkowego kamyka do dowolnego pudełka, niezależnie które pudełko zostanie wybrane.

Problem 6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Każde zadanie jest warte 7 punktów