*Domenica, 13 aprile 2014*

**Problema 4.** Determinare tutti gli interi $n \geq 2$ tali che esistano $n-1$ interi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ con la seguente proprietà: per ogni coppia di indici $i$, $j$ con $0 < i < n$, $0 < j < n$ e $i \neq j$, se $n$ divide $2i + j$, allora $x_i < x_j$.

**Problema 5.** Sia $n$ un intero positivo. Vi sono $n$ scatole, ciascuna contenente un numero non negativo di sassolini. Una mossa consiste nello scegliere una scatola e toglierne due sassolini; uno dei due viene gettato via, l'altro inserito in un'altra scatola a nostra scelta. Una configurazione iniziale di sassolini è detta *risolvibile* se è possibile raggiungere a partire da essa con un numero finito di mosse (eventualmente zero) una configurazione in cui nessuna scatola sia vuota. Determinare tutte le configurazioni iniziali che non sono risolvibili, ma lo diventano non appena un sassolino viene aggiunto in una qualunque delle scatole.

**Problema 6.** Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

per ogni coppia di numeri reali $x$ e $y$.



Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti