Sonntag, 13. April 2014

Aufgabe 4. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 2$, für welche eine Folge ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ existiert, welche die folgende Bedingung erfüllt: Für alle ganzen Zahlen $i \neq j$ mit $0 < i < n, 0 < j < n$, für welche n ein Teiler von $2i + j$ ist, gilt $x_i < x_j$.

Aufgabe 5. Sei n eine positive ganze Zahl. Es gibt n Schachteln, welche je eine nicht-negative Anzahl Kieselsteine enthalten. In einem Zug dürfen wir folgendes tun: Wir wählen eine der Schachteln aus und entnehmen ihr zwei Kieselsteine, werfen einen davon weg und legen den anderen Kieselstein in eine beliebige andere Schachtel. Eine Ausgangsverteilung von Kieselsteinen nennen wir *lösbar*, falls es möglich ist, in endlich vielen (möglicherweise keinen) Zügen eine Verteilung zu erreichen, in welcher keine Schachtel leer ist. Bestimme alle möglichen Ausgangsverteilungen von Kieselsteinen, welche nicht lösbar sind, aber bei Hinzufügen eines einzelnen Kieselsteines lösbar werden, unabhängig davon in welche Schachtel er gelegt wird.

Aufgabe 6. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x, y die folgende Gleichung gilt:

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

.

Dauer: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.