Dimanche 13 avril 2014

Problème 4. Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe des entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ vérifiant la condition que si $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ et n divise $2i + j$, alors $x_i < x_j$.

Problème 5. Soit n un entier strictement positif. On dispose de n boîtes contenant chacune un nombre positif ou nul de cailloux. Un coup consiste à prendre deux cailloux dans une boîte au choix, supprimer l'un d'entre eux et mettre le deuxième dans une autre boîte au choix. Une configuration initiale de cailloux est dite *résoluble* s'il est possible d'atteindre à partir de celle-ci une configuration sans aucune boîte vide en un nombre fini (éventuellement nul) de coups. Déterminer toutes les configurations initiales qui ne sont pas résolubles, mais le deviennent si un caillou supplémentaire est ajouté dans une des boîtes, quelle qu'elle soit.

Problème 6. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

pour tous les réels x et y.

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points