Sunnuntaina 13 huhtikuuta 2014

Tehtävä 4. Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kokonaisluvut $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, jotka toteuttavat ehdon, että jos $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ ja luku n jakaa luvun $2i+j$, niin $x_i < x_j$.

Tehtävä 5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Meillä on n laatikkoa, joista jokaisessa on epänegatiivinen määrä helmiä. Jokaisella siirrolla saamme ottaa valitsemastamme laatikosta kaksi helmeä, heittää pois toisen helmistä ja laittaa toisen helmen toiseen valitsemaamme laatikkoon. Helmien alkuperäistä asettelua kutsutaan *ratkeavaksi*, jos on mahdollista saavuttaa äärellisellä (mahdollisesti nollalla) siirrolla tilanne, jossa ei ole tyhjää laatikkoa. Määritä kaikki sellaiset alkuperäiset helmien asettelut, jotka eivät ole ratkeavia, mutta jotka muuttuvat ratkeviksi, kun yksi helmi lisätään johonkin laatikkoon riippumatta siitä, mihin laatikkoon helmi lisätään.

Tehtävä 6. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jotka toteuttavat ehdon

$$f\left(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2\right) = (y + f(x))(x + f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen