

Субота, 12 квітня, 2014 року

Задача 1. Знайдіть всі дійсні значення  $t$  для яких виконується така властивість: якщо числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  є довжинами сторін деякого не виродженого трикутника, то числа  $a^2 + bct$ ,  $b^2 + cat$ ,  $c^2 + abt$  теж є довжинами сторін деякого не виродженого трикутника.

Задача 2. На сторонах  $AB$  та  $AC$  трикутника  $ABC$  позначено, відмінні від вершин, точки  $D$  та  $E$  відповідно так, що  $DB = BC = CE$ . Прямі  $CD$  та  $BE$  перетинаються у точці  $F$ . Доведіть, що центр вписаного кола  $I$  трикутника  $ABC$ , точка перетину висот  $H$  трикутника  $DEF$  і середина  $M$  дуги  $BAC$  кола описаного навколо трикутника  $ABC$  лежать на одній прямій.

Задача 3. Позначимо кількість додатніх дільників натурального числа  $m$  через  $d(m)$ , а кількість різних простих дільників числа  $m$  через  $\omega(m)$ . Нехай  $k$  натуральне число. Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних чисел  $n$  таких, що  $\omega(n) = k$  і  $d(a^2 + b^2)$  не ділиться на  $d(n)$  для довільних натуральних чисел  $a$ ,  $b$ , що задовольняють умову  $a + b = n$ .