Sábado 12 de abril de 2014

Problema 1. Determina todos los números reales t tales que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado, entonces $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ son también las longitudes de los lados de un triángulo no degenerado.

Problema 2. Sean D y E puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC, respectivamente, y tales que $DB = BC = CE$. Sean F el punto de intersección de las rectas CD y BE, I el incentro del triángulo ABC, H el ortocentro del triángulo DEF y M el punto medio del arco BAC del circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que I, H y M son colineales.

Problema 3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $\omega(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $\omega(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos a y b enteros positivos tales que $a + b = n$.

Duración del examen: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos