Sobota, 12 kwietnia 2014 r.

Problem 1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste t takie, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c są długościami boków pewnego niezdegenerowanego trójkąta, to $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ również.

Problem 2. W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $DB = BC = CE$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie F. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, punkt H — punktem przecięcia wysokości trójkąta DEF, a punkt M — środkiem łuku BAC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że punkty I, H i M są współliniowe.

Problem 3. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej m, a $\omega(m)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych m. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że $\omega(n) = k$ oraz dla każdych dodatnich liczb całkowitych a, b spełniających $a + b = n$ liczba $d(a^2 + b^2)$ nie dzieli się przez $d(n)$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut
Każde zadanie jest warte 7 punktów