Lørdag 12. april 2014

Oppgave 1. Bestem alle reelle konstanter t slik at dersom det finnes en trekant med sidelengder a, b, c, finnes det også en trekant med sidelengder $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$.

Oppgave 2. La ABC være en trekant, og la D og E være indre punkter på sidene AB, henholdsvis AC, slik at $DB = BC = CE$. Videre la F være skjæringspunktet mellom linjene CD og BE. La I være innsenteret til trekanten ABC, H ortosenteret til trekanten DEF, og M punktet på ABC-s omsirkel som halverer buen BAC. Vis at I, H og M er kollineære.

Oppgave 3. For positive heltall n la $d(n)$ og $\omega(n)$ betegne antallet positive divisorer i n, henholdsvis antallet forskjellige primdivisorer i n. La k være et positivt heltall. Vis at det finnes uendelig mange positive heltall n med $\omega(n) = k$ slik at $d(n)$ ikke deler $d(a^2 + b^2)$ uansett valg av positive heltall a og b med $a + b = n$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng