

2014年4月12日 土曜日

**問題 1.** 次の条件をみたす実数  $t$  をすべて求めよ :

三辺の長さが  $a, b, c$  である三角形が存在するような任意の実数  $a, b, c$  について, 三辺の長さが  $a^2 + bct, b^2 + cat, c^2 + abt$  である三角形が存在する.

**問題 2.** 三角形  $ABC$  の辺  $AB, AC$  上 (端点は含まない) にそれぞれ点  $D, E$  があり,  $DB = BC = CE$  をみたしている. 直線  $CD$  と  $BE$  の交点を  $F$ , 三角形  $ABC$  の内心を  $I$ , 三角形  $DEF$  の垂心を  $H$  とし, また, 三角形  $ABC$  の外接円の弧  $\widehat{BAC}$  の中点を  $M$  とする. このとき,  $I, H, M$  が同一直線上にあることを示せ.

**問題 3.** 正の整数  $m$  に対し,  $d(m)$  で  $m$  の正の約数の個数を表し,  $\omega(m)$  で  $m$  の異なる素因数の個数を表す.  $k$  を正の整数とすると, 次の2つの条件をみたす正の整数  $n$  が無限個存在することを示せ.

- $\omega(n) = k$ .
- $a + b = n$  なる任意の正の整数  $a, b$  について,  $d(n)$  が  $d(a^2 + b^2)$  を割り切らない.