*Sabato, 12 aprile 2014*

**Problema 1.** Determinare tutte le costanti reali $t$ tali che, se $a$, $b$, $c$ sono le lunghezze dei lati di un triangolo non degenere, lo stesso valga per $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$.

**Problema 2.** Siano $D$ ed $E$ punti interni rispettivamente al lato $AB$ e al lato $AC$ di un triangolo $ABC$, tali che $DB = BC = CE$. Sia $F$ il punto d'intersezione tra le rette $CD$ e $BE$. Siano $I$ l'incentro del triangolo $ABC$, $H$ l'ortocentro del triangolo $DEF$, $M$ il punto medio dell'arco $BAC$ della circonferenza circoscritta ad $ABC$; dimostrare che $I$, $H$ ed $M$ sono allineati.

**Problema 3.** Dato un intero positivo $m$, chiamiamo $d(m)$ il numero di divisori positivi di $m$ e $\omega(m)$ il numero di divisori primi distinti di $m$. Sia $k$ un intero positivo. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi $n$ tali che $\omega(n)$ sia uguale a $k$ e che, se $a$ e $b$ sono interi positivi che soddisfano $a+b=n$, $d(n)$ *non* divida $d(a^2+b^2)$.



Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti