2014. április 12., szombat

1. Feladat. Határozzuk meg az összes valós t konstanst, amelyre teljesül, hogy amennyiben a, b, c egy háromszög oldalhosszúságai, akkor $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ oldalhosszúságokkal szintén létezik háromszög.

2. Feladat. Legyen az ABC háromszögben D és E rendre az AB és AC oldalnak olyan belső pontjai, melyekre $DB = BC = CE$ teljesül. Jelölje F a CD és BE egyenesek metszéspontját. Jelölje I az ABC háromszög beírt körének középpontját, H a DEF háromszög magasságpontját és M az ABC háromszög körülírt körén az A-t tartalmazó BC körív felezőpontját. Igazoljuk, hogy I, M és H egy egyenesre esnek.

3. Feladat. Jelölje $d(m)$ az m pozitív osztóinak számát, $\omega(m)$ pedig az m különböző prímosztóinak számát. Legyen k egy pozitív egész. Igazoljuk, hogy létezik végtelen sok n pozitív egész, melyre $\omega(n) = k$, és $d(n)$ semely $a + b = n$-et teljesítő a, b pozitív egészekre sem osztja $d(a^2 + b^2)$-et.

Rendelkezésre álló idő: 4 és fél óra
Minden feladat 7 pontot ér