Samstag, 12. April 2014

Aufgabe 1. Bestimme alle konstanten reellen Zahlen t, sodass für jedes Tripel a, b, c, welches die Seitenlängen eines Dreiecks bildet, auch das Tripel $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ die Seitenlängen eines Dreiecks bildet.

Aufgabe 2. Sei ABC ein Dreieck mit Punkten D und E im Innern der Seiten AB respektive AC, sodass $DB = BC = CE$ gilt. Sei F der Schnittpunkt der Geraden CD and BE. Sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks DEF und M der Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens BC auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, welcher A enthält. Zeige, dass I, H und M auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 3. Für eine positive ganze Zahl m bezeichne $d(m)$ die Anzahl positiver Teiler von m und $\omega(m)$ die Anzahl unterschiedlicher Primfaktoren von m. Sei k eine positive ganze Zahl. Zeige, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, sodass (i) $\omega(n) = k$ und (ii) für jedes Paar positiver ganzer Zahlen a, b mit $a + b = n$ gilt: $d(n)$ ist kein Teiler von $d(a^2 + b^2)$.

Dauer: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.