Samedi 12 avril 2014

Problème 1. Déterminer tous les nombres réels t tels que, si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle non plat, il en va de même pour $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$.

Problème 2. Soient D et E des points appartenant respectivement aux intérieurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC, tels que $DB = BC = CE$. Soient F le point d'intersection des droites CD et BE, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle DEF et M le milieu de l'arc BAC du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que I, H et M sont alignés.

Problème 3. Pour un entier strictement positif m, on note $d(m)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de m, et $\omega(m)$ le nombre de diviseurs premiers distincts de m. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $\omega(n) = k$ et tels que pour tous les entiers strictement positifs a et b vérifiant $a + b = n$, $d(n)$ ne divise pas $d\left(a^2 + b^2\right)$.

Durée: 4 heures et 30 minutes

Chaque problème vaut 7 points