

Lauantaina 12 huhtikuuta 2014

Tehtävä 1. Määritä kaikki sellaiset reaaliset vakiot t , että aina jos a , b ja c ovat kolmion sivujen pituudet, niin myös $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$ ovat.

Tehtävä 2. Olkoot D ja E kolmion ABC sivujen AB ja AC sisäpisteitä tässä järjestyksessä niin, että $DB = BC = CE$. Suorat CD ja BE leikkaavat pisteessä F . Osoita, että kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I , kolmion DEF ortokeskus H ja kolmion ABC ympäröivän ympyrän kaaren BAC keskipiste M ovat samalla suoralla.

Tehtävä 3. Olkoon $d(m)$ positiivisen kokonaisluvun m positiivisten tekijöiden lukumäärä ja olkoon $\omega(m)$ luvun m erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n , joilla $\omega(n) = k$ ja luku $d(n)$ ei jaa lukua $d(a^2 + b^2)$ millään positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b , jotka toteuttavat ehdon $a + b = n$.