

Language: Finnish

Day: 2



EGMO 2013

European Girls' Mathematical Olympiad

Torstai 11. huhtikuuta 2013

Tehtävä 4. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut a ja b , joilla löytyy kolme peräkkäistä kokonaislukua, joilla polynomien

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

arvot ovat kokonaislukuja.

Tehtävä 5. Olkoon Ω kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä ω sivuaa sivuja AC ja BC , ja se sivuaa ympyrää Ω sisäpuolelta pisteessä P . Eräs sivun AB suuntainen suora kulkee kolmion ABC läpi ja sivuaa ympyrää ω pisteessä Q .

Osoita, että $\angle ACP = \angle QCB$.

Tehtävä 6. Lumikki ja seitsemän kääpiötä asuvat talossaan metsän siimeksissä. Kuudestatoista peräkkäisestä päivästä jokaisena eräät kääpiöt työskentelivät timanttikaivoksessa kun taas loput kääpiöt keräsivät metsässä marjoja. Kukaan kääpiöistä ei tehnyt minkään päivän aikana molempia töitä. Minä tahansa kahtena eri (ei välttämättä peräkkäisenä) päivänä ainakin kolme kääpiötä tekivät kukin molempia töitä. Lisäksi ensimmäisenä päivänä kaikki seitsemän kääpiötä työskentelivät timanttikaivoksessa.

Osoita, että jonakin näistä 16 päivästä kaikki seitsemän kääpiötä keräsivät marjoja.