Language: **Ukrainian**

Day: **2**

Неділя, 12 квітня 2026

Задача 4. Розглянемо нескінченну послідовність дійсних чисел $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. Відомо, що $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ для всіх натуральних чисел n. Для $r = 2026^{2026}$ доведіть, що

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Задача 5. Дано гострокутний трикутник ABC з $AC > AB$. Через O позначимо центр його описаного кола ω. Нехай K — точка перетину дотичних до ω в точках B і C. Описане коло трикутника ABK вдруге перетинає пряму BC в точці $Z \neq B$. Нехай L — середина відрізку KZ, а X — точка перетину прямих KZ і AB. На колі ABL знайшлася єдина точка V, яка лежить в одній півплощині з A відносно BC, і пряма OV є перпендикулярною до KZ. Доведіть, що прямі LV та CX перпендикулярні.

Задача 6. Нехай p — просте число, а n — натуральне число, яке **не** ділиться на p. Позначимо через k кількість додатніх дільників числа n і нехай ці дільники — це $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Для $i = 1, 2, \ldots, k$, визначимо c_i як кількість таких додатніх дільників ℓ числа d_i^2, що $d_i - \ell$ ділиться на p. Доведіть, що

$$(p-1)\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Час виконання: 4 години 30 хвилин

Кожна задача оцінюється в 7 балів