Language: **Swedish**

Day: **2**

Söndagen, den 12 april 2026

Problem 4. Låt $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ vara en oändlig följd av reella tal sådan att $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ för alla positiva heltal n. Låt $r = 2026^{2026}$. Visa att

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Problem 5. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel där $AC > AB$. Beteckna med ω den omskrivna cirkeln till triangeln ABC och med O dess medelpunkt. Låt K vara skärningspunkten mellan tangenterna till ω vid B och C. Cirkeln som går igenom A, B och K skär linjen BC igen vid $Z \neq B$. Låt L vara mittpunkten av KZ. Låt X vara skärningen mellan linjerna KZ och AB. Låt V vara punkten på cirkeln som går igenom A, B och L, på samma sida av linjen BC som A, sådan att OV är vinkelrät mot KZ. Visa att LV är vinkelrät mot CX.

Problem 6. Låt p vara ett primtal och låt n vara ett positivt heltal sådant att p **inte** delar n. Beteckna med k antalet positiva delare till n, och med $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ de positiva delarna till n. För $i = 1, 2, \ldots, k$, låt c_i vara antalet positiva delare ℓ till d_i^2 sådana att $d_i - \ell$ är delbart med p. Visa att

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Tid: 4 timmar och 30 minuter
Varje problem är värt 7 poäng