Domingo, 12 de abril, 2026

Problema 4. Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ una sucesión infinita de números reales tales que $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ para cualquier entero positivo n. Sea $r = 2026^{2026}$. Demuestra que

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$. Sea ω su circunferencia circunscrita y sea O su circuncentro. Sea K la intersección de las tangentes a ω en B y C. La circunferencia circunscrita de ABK interseca la recta BC nuevamente en $Z \neq B$. Sea L el punto medio de KZ. Sea X la intersección de las rectas KZ y AB. Sea V el punto en la circunferencia circunscrita de ABL que está en el mismo lado que A, respecto de BC, tal que OV es perpendicular a KZ. Prueba que LV es perpendicular a CX.
Nota: La circunferencia circunscrita también se conoce como circuncírculo.

Problema 6. Sean p un número primo y n un entero positivo tales que p **no** divide a n. Denotamos por k al número de divisores positivos de n, y por $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ los divisores positivos de n. Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, sea c_i el número de divisores positivos ℓ de d_i^2 que cumplen que $d_i - \ell$ es divisible por p. Demuestra que

$$(p-1)\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos