nedeľa 12. apríla 2026

Úloha 4. Nech $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel taká, že platí $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ pre každé kladné celé číslo n. Pre $r = 2026^{2026}$ dokážte, že

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Úloha 5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AC| > |AB|$. Označme ω jemu opísanú kružnicu a O jej stred. Nech K je priesečník dotyčníc ku kružnici ω v bodoch B a C. Kružnica opísaná trojuholníku ABK pretína priamku BC znova v bode $Z \neq B$. Označme L stred úsečky KZ. Nech X je priesečník priamok KZ a AB. Označme V taký bod na kružnici opísanej trojuholníku ABL v rovnakej polrovine určenej priamkou BC ako bod A, že priamka OV je kolmá na priamku KZ. Dokážte, že priamky LV a CX sú navzájom kolmé.

Úloha 6. Nech p je prvočíslo a nech n je kladné celé číslo také, že p **nie** je deliteľom n. Označme k počet kladných deliteľov čísla n a označme $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ kladných deliteľov čísla n. Pre $i = 1, 2, \ldots, k$, nech c_i je počet kladných deliteľov ℓ čísla d_i^2 takých, že číslo $d_i - \ell$ je deliteľné p. Dokážte, že

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Čas na riešenie: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 7 bodov