nedelja, 12.4.2026.

Zadatak 4. Neka je $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ beskonačan niz realnih brojeva, takav da za svaki prirodan broj n važi $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$. Za $r = 2026^{2026}$, dokazati da važi

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Zadatak 5. Neka je ABC oštrougli trougao u kome je $AC > AB$. Označimo sa ω njegovu opisanu kružnicu, i sa O njen centar. Tangente na ω u tačkama B i C seku se u tački K. Opisana kružnica trougla ABK ponovo seče pravu BC u tački $Z \neq B$. Neka je L središte duži KZ. Označimo sa X presek pravih KZ i AB. Neka je V tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABL, sa iste strane prave BC kao i tačka A, takva da je OV ortogonalno na KZ. Dokazati da je LV ortogonalno na CX.

Zadatak 6. Neka je p prost broj, i neka je n prirodan broj takav da p **ne** deli n. Označimo sa k broj pozitivnih delilaca broja n, i sa $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ pozitivne delioce broja n. Za svako $i = 1, 2, \ldots, k$, označimo sa c_i broj pozitivnih delilaca ℓ broja d_i^2, takvih da je $d_i - \ell$ deljivo sa p. Dokazati da važi

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.