Language: **Russian**

Day: **2**

Воскресенье, 12 апреля 2026 года

Задача 4. Бесконечная последовательность действительных чисел $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ удовлетворяет условию $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ для любого натурального значения $n$. Пусть $r = 2026^{2026}$. Докажите, что

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Задача 5. Около остроугольного треугольника $ABC$, в котором $AC > AB$, описана окружность $\omega$ с центром в точке $O$. Касательные к окружности $\omega$, проведённые в точках $B$ и $C$, пересекаются в точке $K$. Прямая $BC$ вторично пересекает описанную около треугольника $ABK$ окружность в точке $Z \neq B$. Через $L$ обозначим середину отрезка $KZ$. Прямые $KZ$ и $AB$ пересекаются в точке $X$. Известно, что существует единственная точка $V$ на окружности, описанной около треугольника $ABL$, лежащая по ту же сторону от прямой $BC$, что и точка $A$, и такая, что прямая $OV$ перпендикулярна прямой $KZ$. Докажите, что прямая $LV$ перпендикулярна прямой $CX$.

Задача 6. Дано простое число $p$ и натуральное число $n$, которое не делится на $p$. Пусть число $n$ имеет ровно $k$ натуральных делителей $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Для $i = 1, 2, \ldots, k$ через $c_i$ обозначим количество таких натуральных делителей $\ell$ числа $d_i^2$, для которых $d_i - \ell$ делится на $p$. Докажите, что

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$



Время: 4 часа 30 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов