*Duminică, 12 aprilie 2026*

**Problema 4.** Fie $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ un şir infinit de numere reale astfel încât $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ pentru orice număr natural nenul $n$. Pentru $r = 2026^{2026}$, arătaţi că

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

**Problema 5.** Fie $ABC$ un triunghi ascuţitunghic cu $AC > AB$. Fie $\omega$ cercul său circumscris şi $O$ centrul acestuia. Fie $K$ intersecţia tangentelor în $B$ şi $C$ la $\omega$. Cercul circumscris triunghiului $ABK$ intersectează dreapta $BC$ a doua oară în $Z \neq B$. Fie $L$ mijlocul segmentului $KZ$. Fie $X$ intersecţia dreptelor $KZ$ şi $AB$. Fie $V$ punctul de pe cercul circumscris triunghiului $ABL$, situat de aceeaşi parte a dreptei $BC$ ca şi $A$, cu proprietatea că dreptele $OV$ şi $KZ$ sunt perpendiculare. Arătaţi că dreptele $LV$ şi $CX$ sunt perpendiculare.

**Problema 6.** Fie $p$ un număr prim şi fie $n$ un număr natural nenul cu proprietatea că $p$ **nu** îl divide pe $n$. Fie $k$ numărul divizorilor pozitivi ai lui $n$ şi fie $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ divizorii pozitivi ai lui $n$. Pentru $i = 1, 2, \ldots, k$, fie $c_i$ numărul divizorilor pozitivi $\ell$ ai lui $d_i^2$ cu proprietatea că $d_i - \ell$ este divizibil cu $p$. Arătaţi că

$$(p-1)\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$



Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte