Language: **Portuguese**

Day: **2**

Domingo, 12 de Abril de 2026

Problema 4. Seja $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ uma sequência infinita de números reais tal que $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$, para todo inteiro positivo n. Seja $r = 2026^{2026}$. Mostre que

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Problema 5. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AC > AB$. Denote por ω o seu circuncírculo e por O o seu circuncentro. Seja K a interseção das tangentes a ω nos pontos B e C. O circuncírculo do triângulo ABK intersecta a reta BC novamente em $Z \neq B$. Seja L o ponto médio de KZ. Seja X a interseção das retas KZ e AB. Seja V o ponto no circuncírculo de ABL, situado no mesmo semiplano de BC que o ponto A, tal que OV é perpendicular a KZ. Mostre que LV é perpendicular a CX.

Problema 6. Sejam p um número primo e n um inteiro positivo tal que p **não** divide n. Denotamos por k a quantidade de divisores positivos de n, e por $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ os seus divisores positivos. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, seja c_i a quantidade de divisores positivos ℓ de d_i^2 tais que $d_i - \ell$ é divisível por p. Mostre que

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Language: Português

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos