Language: **Polish**

Day: **2**

Niedziela, 12 kwietnia, 2026

Zadanie 4. Niech $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych, takim że $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ dla każdej liczby dodatniej całkowitej n. Dla $r = 2026^{2026}$, udowodnij że

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Zadanie 5. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym w którym $AC > AB$. Niech ω będzie jego okręgiem opisanym a O środkiem okręgu opisanego. Niech K będzie punktem przecięcia stycznych do okręgu ω w punktach B i C. Okrąg opisany na trójkącie ABK przecina prostą BC w punkcie $Z \neq B$. Niech L będzie środkiem odcinka KZ. Niech X będzie punktem przecięcia prostej KZ z prostą AB. Niech V będzie jedynym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABL znajdującym się po tej samej stronie prostej BC co A, takim że proste OV i KZ są prostopadłe. Udowodnij, że proste LV i CX są prostopadłe.

Zadanie 6. Niech p będzie liczbą pierwszą a n dodatnią liczbą całkowitą, która **nie** jest podzielna przez p. Oznaczmy liczbę dodatnich dzielników n jako k i niech $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ będą dodatnimi dzielnikami liczby n. Dla $i = 1, 2, \ldots, k$, niech c_i będzie liczbą tych dodatnich dzielników ℓ liczby d_i^2, dla których $d_i - \ell$ jest podzielne przez p. Udowodnij, że

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów