Language: **Norwegian**

Day: **2**

Søndag 12. April 2026

Oppgave 4. La $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ være en uendelig følge av reelle tall slik at $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ for alle positive heltall n. Vis at

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}$$

for $r = 2026^{2026}$.

Oppgave 5. La ABC være en spissvinklet trekant med $|AC| > |AB|$. La ω være omsirkelen og O være omsenteret til ABC. La K være skjæringspunktet mellom tangentene til ω i punktene B og C. Sirkelen som går gjennom A, B og K skjærer linjen BC igjen i punktet $Z \neq B$. La L være midtpunktet på KZ. La X være skjæringspunktet mellom linjene KZ og AB. La V være punktet på sirkelen som går gjennom A, B og L, slik at OV står vinkelrett på KZ, og slik at V og A ligger på samme side av BC. Vis at LV står vinkelrett på CX.

Oppgave 6. La p være et primtall og la n være et positivt heltall slik at p **ikke** deler n. La k være antallet positive divisorer av n, og la $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ være de positive divisorene av n. For $i = 1, 2, \ldots, k$, la c_i være antallet positive divisorer ℓ av d_i^2 som er slik at $d_i - \ell$ er delelig med p. Vis at

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng