2026 年 *4* 月 *12* 日日曜日

問題 4. 実数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ は, $1 = a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots$ および, 任意の正の整数 n に対して $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ をみたしているとする. $r = 2026^{2026}$ とおくとき,

$$\frac{1}{r} \leqq a_r \leqq \frac{2}{r+1}$$

が成り立つことを示せ.

問題 5. $AB < AC$ をみたす鋭角三角形 ABC があり, その外接円を ω, 外心を O とする. ω の B における接線と C における接線の交点を K とし, 三角形 ABK の外接円と直線 BC の交点のうち B でない方を Z とする. 線分 KZ の中点を L とし, 直線 KZ と直線 AB の交点を X とする. 三角形 ABL の外接円上の点 V を, 直線 BC に関して A と同じ側にあり, また直線 OV と直線 KZ が垂直に交わるようにとる. (このような V が一意に存在することは認めてよい.) このとき, 直線 LV と直線 CX は垂直に交わることを示せ.

問題 6. p を素数とし, n を p の倍数でない正の整数とする. n の正の約数の個数を k とし, n の正の約数を小さい順に $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ とおく. 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して, d_i^2 の正の約数 ℓ であって $d_i - \ell$ が p の倍数であるようなものの個数を c_i とおく. このとき,

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geqq k^2$$

が成り立つことを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点