Domenica, 12 aprile 2026

Problema 4. Sia $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ una sequenza infinita di numeri reali tali che $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ per ogni intero positivo n. Dato $r = 2026^{2026}$, dimostrare che

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Problema 5. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AC > AB$. Chiamiamo ω la sua circonferenza circoscritta ed O il suo circocentro. Sia K l'intersezione delle tangenti ad ω in B e C. La circonferenza circoscritta al triangolo ABK interseca nuovamente la retta BC in $Z \neq B$. Sia L il punto medio di KZ. Sia X il punto di intersezione delle rette KZ e AB. Sia V il punto sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABL dalla stessa parte di A rispetto a BC tale che OV sia perpendicolare a KZ. Dimostrare che LV è perpendicolare a CX.

Problema 6. Sia p un numero primo e sia n un intero positivo tale che p **non** divide n. Chiamiamo k il numero di divisori positivi di n, e $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ i divisori positivi di n. Dati $i = 1, 2, \ldots, k$, chiamiamo c_i il numero di divisori positivi ℓ di d_i^2 tali che $d_i - \ell$ è divisibile per p. Dimostrare che

$$(p-1)\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$