



Language: Icelandic

Day: 2

Sunnudagurinn 12. apríl, 2026

Dæmi 4. Látum $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ vera óendanlega runu af rauntölum sem er þannig að $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n . Fyrir $r = 2026^{2026}$, sýnið að

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Dæmi 5. Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $AC > AB$. Látum ω vera umritaðan hring hans og O vera miðju þess hrings. Látum K vera skurðpunkt snertlanna við ω í B og C . Hringurinn sem fer gegnum punktana A , B og K sker línuna BC aftur í $Z \neq B$. Látum L vera miðpunkt KZ . Látum X vera skurðpunkt línanna KZ og AB . Látum V vera punktinn á hringnum ABL þannig að OV sé hornrétt á KZ og þannig að V og A séu sömu megin við línuna BC . Sannið að LV sé hornrétt á CX .

Dæmi 6. Látum p vera frumtölu og látum n vera jákvæða heiltölu þannig að n sé **ekki** deilanleg með p . Táknum með k fjölda jákvæðra deila tölunnar n , og táknnum með $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ alla jákvæðu deila n . Fyrir $i = 1, 2, \dots, k$, látum c_i vera fjölda jákvæðra talna ℓ sem deila d_i^2 og þannig að $d_i - \ell$ sé deilanleg með p . Sannið að

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$