Language: **Hungarian**

Day: **2**

2026. április 12. vasárnap

Feladat 4. Legyen $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ egy valós számokból álló végtelen számsor, amelyre minden n pozitív egész szám esetén teljesül, hogy $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$. Legyen $r = 2026^{2026}$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Feladat 5. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amelyre $AC > AB$. Jelölje ABC köréírt körét ω és legyen ω középpontja O. Az ω-hoz B-ben és C-ben húzott érintők K-ban metszik egymást. Legyen az ABK háromszög köréírt körének és a BC egyenesnek a második metszéspontja Z. Jelöljük KZ felezőpontját L-lel. Legyen a KZ és AB egyenesek metszéspontja X. Az O-ból KZ-re állított merőleges az ABL háromszög köréírt körét a BC egyenes A-felőli oldalán egyetlen pontban metszi. Legyen ez a pont V. Bizonyítsd be, hogy LV merőleges CX-re.

Feladat 6. Vegyünk egy p prímszámot és legyen n egy pozitív egész szám, amelyre p **nem** osztja n-et. Legyen az n pozitív osztóinak száma k és az osztókat jelöljük $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$-nel. Minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra jelölje c_i a d_i^2 olyan pozitív ℓ osztóinak számát, amelyekre p osztja $d_i - \ell$-et. Bizonyítsd be, hogy

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér