Language: **Hebrew**

Day: **2**

יום ראשון, 12 באפריל, 2026

שאלה 4. תהי $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ סדרה אינסופית של מספרים ממשיים כך שלכל שלם חיובי n מתקיים $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$. עבור $r = 2026^{2026}$ הוכיחי שמתקיים:

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

שאלה 5. יהי ABC משולש חד זוויות בו $AC > AB$. נסמן ב-ω את המעגל החוסם שלו וב-O את מרכז המעגל החוסם. נסמן ב-K את נקודת החיתוך של המשיקים ל-ω בנקודות B ו-C. המעגל ABK נחתך עם הישר BC שנית בנקודה $Z \neq B$. יהי L אמצע הקטע KZ. נסמן ב-X את נקודת החיתוך של הישרים KZ ו-AB. תהי V הנקודה על המעגל ABL שנמצאת באותו הצד של BC כמו A, עבורה OV מאונך ל-KZ. הוכיחי ש-LV מאונך ל-CX.

שאלה 6. יהי p מספר ראשוני ויהי n שלם חיובי כך ש-n **לא** מתחלק ב-p. נסמן ב-k את מספר המחלקים החיוביים של n, ונסמן ב-n את המחלקים החיוביים של $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. עבור $i = 1, 2, \ldots, k$, נסמן ב-c_i את מספר המחלקים החיוביים ℓ של d_i^2 שמקיימים שהמספר $d_i - \ell$ מתחלק ב-p. הוכיחי שמתקיים:

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות