



Language: **Greek**

Day: **2**

Κυριακή, 12 Απριλίου 2026

Πρόβλημα 4. Έστω $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ μια άπειρη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ για όλους τους θετικούς ακέραιους n . Για $r = 2026^{2026}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Πρόβλημα 5. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AC > AB$. Συμβολίζουμε με ω τον περιγεγραμμένο κύκλο του, και με O το περίκεντρο του. Έστω K το σημείο τομής των εφαπτόμενων στον ω στα σημεία B και C . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABK τέμνει την ευθεία BC ξανά στο $Z \neq B$. Έστω L το μέσο του KZ . Έστω X το σημείο τομής των ευθειών KZ και AB . Έστω V το σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του ABL στην ίδια πλευρά της ευθείας BC με το A τέτοιο, ώστε η ευθεία OV να είναι κάθετη στην ευθεία KZ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία LV είναι κάθετη στην ευθεία CX .

Πρόβλημα 6. Έστω p ένας πρώτος αριθμός, και έστω n ένας θετικός ακέραιος τέτοιος, ώστε ο p να μην διαιρεί τον n . Έστω k ο αριθμός των θετικών διαιρετών του n , και $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ οι θετικοί διαιρέτες του n . Για $i = 1, 2, \dots, k$, έστω c_i ο αριθμός των θετικών διαιρετών ℓ του d_i^2 τέτοιων, ώστε ο $d_i - \ell$ να διαιρείται με τον p . Να αποδείξετε ότι

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$