Sonntag, 12. April 2026

Aufgabe 4. Sei $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen, sodass $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Zeige, dass für $r = 2026^{2026}$ gilt, dass

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Aufgabe 5. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\overline{AC} > \overline{AB}$, Umkreis ω und Umkreismittelpunkt O. Sei K der Schnittpunkt der beiden Tangenten an ω bei B und C. Der Kreis durch A, B und K schneide die Gerade BC erneut in $Z \neq B$. Sei L der Mittelpunkt von ZK, und X der Schnittpunkt der Geraden ZK und AB. Sei V derjenige Punkt auf dem Kreis durch A, B und L, der auf der gleichen Seite von BC wie A liegt, sodass OV senkrecht auf ZK steht. Zeige, dass LV senkrecht auf CX steht.

Aufgabe 6. Sei p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl, sodass p die Zahl n **nicht** teilt. Sei k die Anzahl positiver Teiler von n und seien $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ die positiven Teiler von n. Für $i = 1, 2, \ldots, k$ sei c_i die Anzahl positiver Teiler ℓ von d_i^2, sodass $d_i - \ell$ durch p teilbar ist. Zeige, dass

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert