



Language: French

Day: 2

*Dimanche 12 avril 2026*

**Problème 4.** Soit  $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  une suite infinie de nombres réels telle que  $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$  pour tout entier strictement positif  $n$ . Posons  $r = 2026^{2026}$ ; prouver que

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

**Problème 5.** Soit  $ABC$  un triangle dont tous les angles sont aigus, vérifiant  $AC > AB$ . On note  $\omega$  son cercle circonscrit et  $O$  le centre de ce cercle. Soit  $K$  l'intersection des tangentes à  $\omega$  en  $B$  et  $C$ . Le cercle circonscrit à  $ABK$  recoupe la droite  $BC$  en  $Z \neq B$ . Soit  $L$  le milieu du segment  $KZ$ . Soit  $X$  le point d'intersection des droites  $KZ$  et  $AB$ . Soit  $V$  l'unique point du cercle circonscrit à  $ABL$ , situé du même côté que  $A$  par rapport à la droite  $BC$ , tel que les droites  $OV$  et  $KZ$  soient perpendiculaires. Prouver que les droites  $LV$  et  $CX$  sont perpendiculaires.

**Problème 6.** Soit  $p$  un nombre premier et soit  $n$  un entier strictement positif tel que  $p$  **ne divise pas**  $n$ . Désignons par  $k$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ , et par  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  les diviseurs positifs de  $n$ . Pour  $i = 1, 2, \dots, k$ , soit  $c_i$  le nombre de diviseurs positifs  $\ell$  de  $d_i^2$  tel que  $d_i - \ell$  soit divisible par  $p$ . Prouver que

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$