Language: **Finnish**

Day: **2**

Sunnuntai, 12.4.2026

Tehtävä 4. Olkoon $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ ääretön reaalilukujen jono, jolla $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Olkoon $r = 2026^{2026}$. Osoita, että

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Tehtävä 5. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa pätee $AC > AB$. Olkoon ω kolmion ympärysympyrä, ja O tämän keskipiste. Olkoon K ympyrän ω pisteiden B ja C kautta kulkevien tangenttien leikkauspiste. Ympyrä ABK leikkaa suoran BC uudelleen pisteessä $Z \neq B$. Olkoon L janan KZ keskipiste. Olkoon X suorien KZ ja AB leikkauspiste. Olkoon V se ympyrän ABL piste, joka on samalla puolella sivua BC kuin A, ja jolla OV ja KZ ovat kohtisuorat. Osoita, että LV ja CX ovat kohtisuorat.

Tehtävä 6. Olkoot p alkuluku ja n sellainen positiivinen kokonaisluku, jolla p **ei** jaa lukua n. Merkitään k:lla luvun n positiivisten jakajien määrää, ja $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ luvun n positiivisia jakajia. Jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, k$, olkoon c_i niiden luvun d_i^2 positiivisten jakajien ℓ määrä, joilla $d_i - \ell$ on jaollinen luvulla p. Osoita, että

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia

Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen