Language: **Czech**

Day: **2**

neděle 12. dubna 2026

Úloha 4. Nechť $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ je nekonečná posloupnost reálných čísel taková, že $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ pro všechna kladná celá čísla n. Pro $r = 2026^{2026}$ dokažte, že

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Úloha 5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AC| > |AB|$. Označme ω jeho kružnici opsanou a O její střed. Nechť K je průsečík tečen ke kružnici ω v bodech B a C. Kružnice opsaná trojúhelníku ABK protíná přímku BC podruhé v bodě $Z \neq B$. Označme L střed úsečky KZ. Nechť X je průsečík přímek KZ a AB. Dále označme V ten bod na kružnici opsané trojúhelníku ABL ležící v téže polorovině vyťaté přímkou BC jako bod A takový, že přímka OV je kolmá na přímku KZ. Dokažte, že přímky LV a CX jsou na sebe kolmé.

Úloha 6. Nechť p je prvočíslo a nechť n je kladné celé číslo takové, že p **nedělí** n. Označme k počet kladných dělitelů čísla n a $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ kladné dělitele čísla n. Pro $i = 1, 2, \ldots, k$, nechť c_i je počet kladných dělitelů ℓ čísla d_i^2 takových, že číslo $d_i - \ell$ je dělitelné p. Dokažte, že

$$(p-1)\,(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 7 body