



Language: Chinese (Traditional)

Day: 2

2026 年 4 月 12 日 星期日

問題 4. 令 $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ 為一由實數組成的無窮數列，使得 $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ 對於所有正整數 n 皆成立。令 $r = 2026^{2026}$ 。證明：

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

問題 5. 令 ABC 為一銳角三角形，其中 $AC > AB$ 。令 ω 為其外接圓， O 為其外心。令 K 為 ω 對 B 和 C 的兩切線交點。令三角形 ABK 外接圓再交 BC 於 $Z \neq B$ 。又令 L 為 KZ 中點， X 則為直線 KZ 與 AB 交點。令 V 為三角形 ABL 外接圓上，與 A 在 BC 同側，且使得 OV 垂直 KZ 的唯一點。證明： LV 垂直 CX 。

問題 6. 令 p 為一質數， n 則為一個不被 p 整除的正整數。令 k 為 n 的正因數個數， $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ 則為 n 的所有正因數。對於 $i = 1, 2, \dots, k$ ，令 c_i 為 d_i^2 的所有正因數 ℓ 中，讓 $d_i - \ell$ 被 p 整除的 ℓ 的個數。證明：

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$