



Language: Chinese (Simplified)

Day: 2

2026年4月12日, 周日

题目 4. 考虑一个实数的无穷序列 $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$, 满足 $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ 对于所有正整数 n 成立. 对于 $r = 2026^{2026}$, 证明:

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

题目 5. 考虑锐角三角形 ABC . 其中 $AC > AB$. 用 ω 表示 ABC 的外接圆, O 是其圆心. 过 B 和 C 作圆 ω 的切线, 交点记为 K . 圆 ABK 和直线 BC 相交于 $Z \neq B$. 线段 KZ 的中点记为 L . 直线 KZ 和 AB 的交点记为 X . 圆 ABL 上存在唯一一点 V , 满足 OV 和 KZ 垂直, 且 V 和 A 落在直线 BC 的同一边.

证明: LV 和 CX 垂直.

题目 6. 考虑素数 p 和正整数 n . 其中 n 不能被 p 整除. 数 n 一共有 k 个正因子, 记作 $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. 对于 $i = 1, 2, \dots, k$, 考虑 d_i^2 的正因子 ℓ , 满足 $d_i - \ell$ 能被 p 整除; 记所有这样的正因子的个数为 c_i .

证明:

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$