Неделя, 12 април 2026

Задача 4. Нека $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ е безкрайна редица от реални числа такава, че $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ за всяко естествено число n. За $r = 2026^{2026}$, докажете, че

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Задача 5. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $AC > AB$. С ω е означена описаната му окръжност, а с O - центъра ѝ. Нека K е пресечната точка на допирателните към ω в точките B и C. Окръжността, описана около триъгълник ABK, пресича правата BC за втори път в точката $Z \neq B$. Точката L е среда на отсечката KZ. Точката X е пресечната точка на правите KZ и AB. Нека V е точката от окръжността, описана около триъгълник ABL, която лежи от същата страна на правата BC, както точката A, и която е такава, че правата OV е перпендикулярна на правата KZ. Докажете, че правата LV е перпендикулярна на правата CX.

Задача 6. Нека p е просто число и нека n е естествено число такова, че p **не** дели n. Нека k е броят на положителните делители на n, и нека $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ са всички положителни делители на n. За $i = 1, 2, \ldots, k$, нека c_i е броят положителни делители ℓ на d_i^2, за които $d_i - \ell$ се дели на p. Докажете, че

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки