Language: **Bosnian**

Day: **2**

nedjelja, 12. april 2026.

Zadatak 4. Neka je $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ beskonačan niz realnih brojeva, takav da za svaki prirodan broj n vrijedi $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$. Ako je $r = 2026^{2026}$, dokazati da vrijedi

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Zadatak 5. Neka je ABC oštrougli trougao u kojem je $AC > AB$. Označimo sa ω njegovu opisanu kružnicu, i sa O njen centar. Tangente na ω u tačkama B i C sijeku se u tački K. Opisana kružnica trougla ABK siječe pravu BC ponovo u $Z \neq B$. Neka je L sredina duži KZ. Neka je X presjek pravih KZ i AB. Neka je V tačka na opisanoj kružnici trougla ABL, sa iste strane prave BC kao i tačka A, tako da je OV okomito na KZ. Dokazati da je LV okomito na CX.

Zadatak 6. Neka je p prost broj, i neka je n prirodan broj takav da p **ne** dijeli n. Označimo sa k broj pozitivnih djelilaca broja n, i sa $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ pozitivne djelioce broja n. Za svako $i = 1, 2, \ldots, k$, označimo sa c_i broj pozitivnih djelilaca ℓ broja d_i^2, takvih da je $d_i - \ell$ djeljivo sa p. Dokazati da vrijedi

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2.$$

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.