



Language: Bangla

Day: 2

রবিবার, ১২ এপ্রিল ২০২৬

সমস্যা ৪. $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ হলো বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা যেন সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্যই $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ হয়। $r = 2026^{2026}$ এর জন্য প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

সমস্যা ৫. ABC হলো একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ যার $AC > AB$ । ω হলো এর পরিবৃত্ত এবং O হলো পরিকেন্দ্র। K বিন্দুটি হলো ω বৃত্তের B ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু। ABK বৃত্তটি BC রেখাকে আবার $Z \neq B$ বিন্দুতে ছেদ করে। L হলো KZ -এর মধ্যবিন্দু। X হলো KZ এবং AB রেখাদুটির ছেদবিন্দু। V হলো ABL বৃত্তের ওপর এমন একটি বিন্দু যেটি BC রেখার যে পাশে A অবস্থিত, সেই পাশে অবস্থিত এবং OV এবং KZ পরস্পরের ওপর লম্ব। প্রমাণ করো যে LV এবং CX পরস্পরের ওপর লম্ব।

সমস্যা ৬. ধরো p একটি মৌলিক সংখ্যা এবং n এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেন p দ্বারা n বিভাজ্য না হয়। k হলো n এর সকল ধনাত্মক উৎপাদকের সংখ্যা এবং $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ হলো n এর ধনাত্মক উৎপাদকসমূহ। প্রতিটি $i = 1, 2, \dots, k$ -এর জন্য, c_i হলো d_i^2 -এর এমন সকল ধনাত্মক উৎপাদক l -এর সংখ্যা যাতে করে p দ্বারা $d_i - l$ বিভাজ্য। প্রমাণ করো যে

$$(p-1)(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq k^2.$$

Language: Bangla

সময়: ৪ ঘণ্টা ৩০ মিনিট
প্রতিটি সমস্যার পূর্ণমান ৭