Субота, 11 квітня 2026

Задача 1. Дошка розміру 2026×2026 називається *бордовою*, якщо щонайменше одна з її 2026^2 клітинок пофарбована в бордовий колір. Прямокутник, утворений з клітинок дошки, називається *непарним*, якщо він містить непарну кількість бордових клітинок. Знайдіть найбільше можливе число M, для якого в кожній з усіх можливих бордових дошок розміру 2026×2026 існує непарний прямокутник, що складається щонайменше з M клітинок.

Зауваження: прямокутники, що розглядаються в цій задачі, включають всі свої внутрішні клітинки.

Задача 2. Нехай n — натуральне число. Марічка починає гру з числом 1 на дошці. Довільну кількість разів вона проводить таку операцію: обирає число j $(1 \leq j \leq n)$, витирає наявне на дошці число V і записує замість нього число $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Тут $R(x)$ позначає найближче ціле число до x; якщо x є в точності посередині між двома послідовними цілими числами, то $R(x)$ є округленням вгору. Наприклад, $R(1.3) = 1$, а $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Доведіть, що для кожного фіксованого n існує натуральне число B таке, що число в Марічки на дошці ніколи не перевищить B.

b) Для кожного n позначимо через $f(n)$ найбільше число, яке Марічка може отримати після скінченної кількості операцій. Покажіть, що існує натуральне N таке, що $f(n)$ ділиться націло на 2026 для довільного $n \geq N$.

Задача 3. Позначимо через $\mathbb{R}$ множину дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних чисел x, y справджується рівність

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Час виконання: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів