Language: **Turkish**

Day: **1**

Cumartesi, 11 Nisan 2026

Soru 1. 2026^2 birim karesinden en az biri kırmızı olan 2026×2026 boyutlarındaki bir tahtaya *bordeaux* tahta diyelim. Birim karelerden oluşan bir dikdörtgensel bölgede tek sayıda kırmızı birim kare varsa bu bölgeye *tekli-dikdörtgensel* diyelim. M pozitif tam sayısının en büyük hangi değerinde, her 2026×2026 bordeaux tahtada en az M birim kareden oluşan bir tekli-dikdörtgensel bölge bulunur?

Not: Bir dikdörtgensel bölgenin kenarları tahtanın kenarlarına paraleldir. Bir dikdörtgensel bölge iç bölgesindeki tüm birim kareleri içerir. Kare de bir dikdörtgendir.

Soru 2. Bir n pozitif tam sayısı verilmiş olsun. Aslı başlangıçta üzerinde 1 sayısı yazı olan bir tahtada bir oyun oynuyor. Aslı istediği kadar hamle yaparak her hamlesinde $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bir j tam sayısı seçiyor ve tahtadaki V sayısını $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ sayısı ile değiştiriyor. Burada $R(x)$, x sayısına en yakın olan tam sayıdır; eğer x sayısı iki ardışık tam sayının tam ortasındaysa üste yuvarlanır. Örneğin, $R(1.3) = 1$ ve $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Verilmiş her n pozitif tam sayısı için, öyle bir B pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz ki, Aslı hiçbir zaman tahtaya B sayısından büyük bir sayı yazamaz.

b) Verilmiş her n pozitif tam sayısı için, $f(n)$ ile tahtada sonlu sayıda hamle sonucunda elde edilebilecek en büyük sayıyı gösterelim. Öyle bir N pozitif tam sayısının bulunduğunu gösteriniz ki, her $n \geq N$ pozitif tam sayısı için 2026 sayısı $f(n)$ sayısını böler.

Soru 3. Tüm gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösteriliyor. Tüm x ve y gerçel sayıları için

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y)$$

eşitliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Süre: 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 7 puan değerindedir.