Lördagen, den 11 april 2026

Problem 1. Ett 2026×2026 bräde sägs vara *bordeaux* om åtminstone en av dess 2026^2 rutor är färgad röd. Ett rektangulärt område som består av rutor är *uddligt-rektangulärt* om det innehåller ett udda antal röda rutor. Bestäm det största positiva heltalet M sådant att det i varje möjligt 2026×2026 bordeaux bräde existerar ett uddligt-rektangulärt område som består av åtminstone M rutor.

Anmärkning: Ett rektangulärt område har sidor som är parallella med brädets sidor och innefattar hela dess inre.

Problem 2. Givet ett positivt heltal n spelar Sven ett spel där han börjar med talet 1 på tavlan. Så många gånger som han önskar får han välja ett heltal j sådant att $1 \leq j \leq n$ och ersätta talet V på tavlan med talet $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Här betecknar $R(x)$ heltalet närmast x; om x ligger precis mittemellan två på varandra följande heltal avrundas det uppåt. Till exempel är $R(1.3) = 1$ och $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Visa att för varje givet n finns det ett positivt heltal B sådant att Sven aldrig kan få ett tal större än B på tavlan.

b) För varje givet n, låt $f(n)$ vara det största talet som kan fås på tavlan efter ändligt många ersättningar. Visa att det existerar ett positivt heltal N sådant att 2026 delar $f(n)$ för alla $n \geq N$.

Problem 3. Låt $\mathbb{R}$ vara mängden av alla reella tal. Bestäm alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att för alla reella tal x, y gäller följande:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Tid: 4 timmar och 30 minuter
Varje problem är värt 7 poäng