Sábado, 11 de abril, 2026

Problema 1. Un tablero de 2026×2026 celdas se dice *francés* si al menos una de sus 2026^2 celdas unitarias es roja. Una región rectangular formada por celdas del tablero se dice *dispar* si contiene un número impar de celdas rojas. Encuentra el mayor entero positivo M tal que, en cualquier tablero francés de 2026×2026 celdas, existe alguna región rectangular dispar de al menos M celdas.
Nota: Una región rectangular contiene todo su interior y sus lados son paralelos a los lados del tablero.

Problema 2. Dado un entero positivo n, María comienza un juego con el número 1 escrito en una pizarra. Tantas veces como quiera, María puede hacer lo siguiente: elegir un entero j tal que $1 \leq j \leq n$ y reemplazar el número V de la pizarra por el número $j \cdot R(\frac{V}{j})$. En este contexto, $R(x)$ denota el entero más cercano a x; si x está a la misma distancia de dos enteros consecutivos, $R(x)$ redondea hacia arriba. Por ejemplo, $R(1.3) = 1$ y $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

(a) Prueba que, dado n fijo, existe un entero positivo B tal que María nunca puede escribir un número mayor que B en la pizarra.

(b) Para cualquier n, sea $f(n)$ el máximo número que puede escribir en la pizarra después de una cantidad finita de reemplazos. Demuestra que existe un entero positivo N tal que para todo $n \geq N$, se tiene que 2026 divide a $f(n)$.

Problema 3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y, se cumple que

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos