



Language: **Slovenian**

Day: **1**

sobota, 11. april 2026

Naloga 1. Plošča velikosti 2026×2026 je *bordojska*, če je vsaj eno izmed njenih 2026^2 polj pobarvano rdeče. Pravokotno območje, sestavljeno iz polj te plošče, je *liho pravokotno*, če vsebuje liho število rdečih polj. Poišči največje naravno število M , za katero velja, da na vsaki možni bordojski plošči velikosti 2026×2026 obstaja liho pravokotno območje, sestavljeno iz vsaj M polj.

Opomba: Pravokotno območje ima stranice, vzporedne stranicam plošče, in vsebuje vsa polja znotraj teh stranic.

Naloga 2. Za dano naravno število n Marie igra igro, pri kateri začne s številom 1 na tabli. Kolikokrat koli želi, lahko izbere naravno število j , kjer je $1 \leq j \leq n$, in število V na tabli zamenja s številom $j \cdot Z\left(\frac{V}{j}\right)$. Tu $Z(x)$ označuje najbližje celo število številu x ; če je x točno na sredini med dvema zaporednima celima številoma, se zaokroži navzgor. Na primer, $Z(1,3) = 1$ in $Z(1,5) = Z(1,8) = 2$.

- Dokaži, da za vsako dano naravno število n obstaja naravno število B , tako da Marie na tabli nikoli ne more doseči števila, večjega od B .
- Za vsako dano naravno število n naj bo $f(n)$ največje možno število, ki ga Marie lahko dobi na tabli po končno mnogo zamenjavah. Dokaži, da obstaja naravno število N , tako da za vsak $n \geq N$ velja, da 2026 deli $f(n)$.

Naloga 3. Naj bo \mathbb{R} množica realnih števil. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere za vsa realna števila x, y velja:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$