*sobota 11. apríla 2026*

**Úloha 1.** Tabuľka veľkosti $2026 \times 2026$ je *bordová*, ak je aspoň jeden spomedzi jej $2026^2$ jednotkových štvorčekov vyfarbený na červeno. Obdĺžniková oblasť zložená z jednotkových štvorčekov je *nepárno-obdĺžniková*, ak obsahuje nepárny počet na červeno vyfarbených štvorčekov. Určte najväčšie kladné celé číslo $M$ také, že v akejkoľvek bordovej tabuľke veľkosti $2026 \times 2026$ existuje nepárno-obdĺžniková oblasť s aspoň $M$ štvorčekmi.

*Poznámka:* Obdĺžniková oblasť má strany rovnobežné so stranami tabuľky a obsahuje celé svoje vnútro.

**Úloha 2.** Majme kladné celé číslo $n$. Maruška hrá hru, kde začína s číslom 1 napísaným na tabuli. Maruška si môže ľubovoľne veľa krát zvoliť celé číslo $j$ také, že $1 \leq j \leq n$, a nahradiť číslo $V$ na tabuli číslom $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Tu $R(x)$ označuje celé číslo najbližšie k $x$; ak $x$ je presne v polovici medzi dvoma za sebou idúcimi celými číslami, zaokrúhli sa nahor. Napríklad $R(1.3) = 1$ a $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Dokážte, že pre každé dané $n$ existuje kladné celé číslo $B$ také, že Maruška nemôže nikdy skončiť s číslom väčším než $B$ na tabuli.

b) Pre ľubovoľné $n$, nech $f(n)$ je najväčšie číslo, ktoré je možné dostať na tabuli po konečnom počte nahradení. Ukážte, že existuje kladné celé číslo $N$ také, že pre každé $n \geq N$ je $f(n)$ deliteľné číslom 2026.

**Úloha 3.** Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné reálne čísla $x$, $y$ platí

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$



Čas na riešenie: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 7 bodov