Language: **Serbian**

Day: **1**

subota, 11.4.2026.

Zadatak 1. Tabla dimenzija 2026×2026 je *bordo* ako je bar jedan od njenih 2026^2 jediničnih kvadratića obojen crveno. Pravougaoni region sastavljen od kvadratića je *neparno-crven* ako sadrži neparan broj crvenih kvadratića. Odrediti najveći prirodan broj M takav da na svakoj 2026×2026 bordo tabli postoji neparno-crven pravougaoni region sa bar M kvadratića.

Napomena: Pravougaoni region ima stranice koje su paralelne stranicama table, i sadrži svoju celokupnu unutrašnjost.

Zadatak 2. Za dati prirodan broj n, Marija igra igru koja počinje sa brojem 1 napisanim na tabli. Ona može, koliko god to puta želi, da izabere prirodan broj j takav da $1 \leq j \leq n$, i da broj V koji je u tom momentu na tabli zameni brojem $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Pritom, $R(x)$ označava ceo broj najbliži x; ako je x na jednakom rastojanju od dva uzastopna cela broja, zaokružuje se na gore. Na primer, $R(1{,}3) = 1$ i $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Dokazati da za svako n postoji prirodan broj B, takav da Marija nikad ne može dobiti broj na tabli veći od B.

b) Za dato n, neka je $f(n)$ najveći broj koji se može dobiti na tabli nakon konačnog broja zamena. Dokazati da postoji prirodan broj N takav da za svako $n \geq N$ važi da 2026 deli $f(n)$.

Zadatak 3. Označimo sa $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x, y važi

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.